Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

EXAMEN FINAL - 22/03/2024

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:..

TEMA 3

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar JUSTIFICADAS.

EJERCICIO 1: Se sabe que f es una función cuadrática sobreyectiva que a valores del conjunto $\mathbb{R}$ le asigna imágenes en el intervalo $(-\infty, 3]$ y que $f(x) > 0$ si y solo si $x \in (-1, 5)$. Se redefine el dominio de f para que admita inversa de manera tal que $-2 \in \operatorname{Im}(f^{-1})$. Determinar la función f^{-1} indicando su dominio e imagen.

EJERCICIO 2:

(a) Sean las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 5^x$. Sabiendo que $f(2) = 4$ y $f(-1/2) = \dfrac{1}{4}$, determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) \cdot g(x) - 25g(x) \leq 0$$

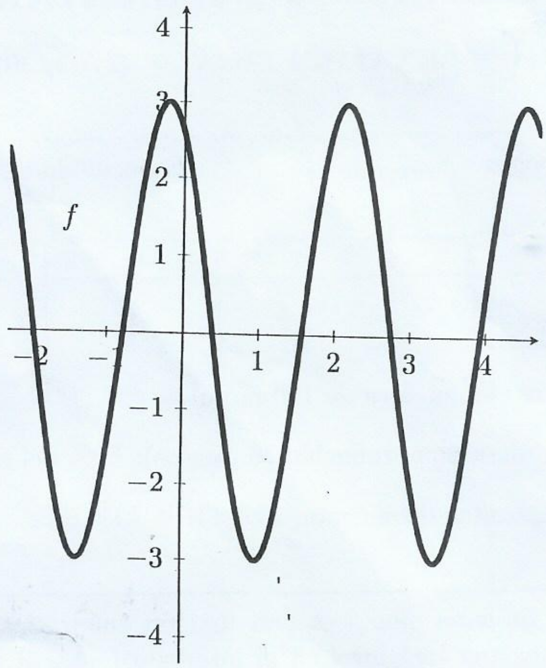
(b) Resolver la ecuación

$$\log_{1/3}(x-1) + 3\log_9(x-1) - \log_9(x+3) = 1 - \frac{1}{2}\log_3(2x-7)$$

EJERCICIO 3: El polinomio $p(x) = bx^5 + ax^4 + ax + 6$, con $b \neq 0$, tiene a $x = -1$ como una raíz múltiple. Determinar un polinomio mónico, $m(x)$, que no sea divisible por $x + 1$ y que divida a p.

EJERCICIO 4:

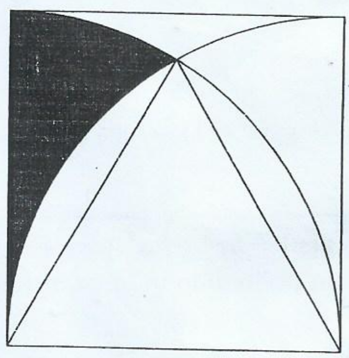
(a) La función sinusoidal f alcanza su mínimo valor, -3, en $x = \frac{5}{16}\pi$ y su máximo valor, 3, en $x = \frac{11}{16}\pi$.



Resolver la ecuación $f(x) = -\frac{3}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$

(b) Sean los vectores $\vec{v} = (1,2)$, $\vec{w} = (4,-3)$ y $\vec{x} = (2,1)$. Determinar todos los vectores $\vec{z} = (a,b)$ tales que $\vec{v} + \vec{z}$ sea ortogonal a $\vec{x}$ y $||proy_{\vec{w}}(\vec{v} + \vec{z})|| = 2$.

EJERCICIO 5: Con centro en dos de los vértices de un cuadrado se trazaron arcos de circunferencia tal como se muestra en el dibujo. Sabiendo que el lado del cuadrado mide $4\,cm$, calcular el área de la región sombreada.



Seminario Universitario	Final	tema 3	HOJA N° 1 FECHA 22-3-24

1) Se sabe que f es una función cuadrática sobreyectiva que, a valores del conj. $\mathbb{R}$ le asigna imágenes en el intervalo $(-\infty, 3]$ y que $f(x) > 0$ si y solo si $x \in (-1;5)$.

Se redefine el dominio de f para que admita inversa de manera tal que $-2 \in Im(f^{-1})$

Determinar la función f^{-1} indicando su dominio e imagen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad Im(f) = (-\infty, 3]$$

$$f(x) = a(\underset{x_v}{x-h})^2 + \overset{y_v}{k} \qquad y_v = 3 \Rightarrow \quad \Rightarrow a<0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;5)$$

$$\underbrace{x_v = \frac{5+(-1)}{2}}_{x=2}$$

$$\boxed{f(x) = a(x-2)^2 + 3}$$

$$f(-1) = 0 \rightarrow 0 = a(-1-2)^2 + 3 = 9a + 3$$

$$\boxed{a = -1/3}$$

$$\boxed{f(x) = -1/3(x-2)^2 + 3}$$

$$-2 \in Im f^{-1} \Rightarrow -2 \in Df \rightarrow \boxed{f(x) = \frac{-1}{3}(x-2)^2 + 3 \quad x \in (-\infty, 2]}$$

$$y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$$

$$y - 3 = \frac{-1}{3}(x-2)^2$$

$$-3(y-3) = (x-2)^2 \qquad x \leq 2$$

$$\sqrt{-3y+9} = |x-2|$$

$$|x-2| = -x+2 = \sqrt{9-3y}$$

$$\boxed{2 - \sqrt{9-3y} = x}$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{9-3x}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{9-3x}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Df^{-1} = (-\infty, 3] \\ Im(f) = (-\infty, 2] \end{array}}$$

NOTA

② a) Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 5^x$

Sabiendo que $f(2) = 4$ y $f(-1/2) = \frac{1}{4}$ determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) \cdot g(x) - 25\, g(x) \leq 0.$$

$$f(2) = 4 = a2^2 + b2 = 4a + 2b = 4$$
$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} = a(-\tfrac{1}{2})^2 + b\cdot(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{4}$$

$a = 1$
$b = 0$

$$\boxed{f(x) = x^2}$$

$$f(x) \cdot g(x) - 25\, g(x) \leq 0$$
$$x^2 \cdot 5^x - 5^2 \cdot 5^x \leq 0$$
$$x^2 \cdot \cancel{5^x} \leq 5^2 \cdot \cancel{5^x}$$
$$x^2 \leq 5^2 \longrightarrow |x| \leq 5$$

$$\boxed{S = [-5\,;\,5]}$$

b) Resolver la ecuación

$$\log_{1/3}(x-1) + 3\log_9(x-1) - \log_9(x+3) = 1 - \frac{1}{2}\log_3(2x-7)$$

$$\log_{3^{-1}}(x-1) + 3\log_{3^2}(x-1) - \log_{3^2}(x+3) = 1 - \log_3\left(\sqrt{2x-7}\right)$$

$$\underbrace{-\log_3(x-1) + \frac{3}{2}\log_3(x-1)} - \frac{1}{2}\log_3(x+3) + \log_3\left(\sqrt{2x-7}\right) = 1$$

$$\frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3\left(\sqrt{x+3}\right) + \log_3\left(\sqrt{2x-7}\right) = 1$$

$$\log_3\left(\sqrt{x-1}\right) + \log_3\left(\frac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{x+3}}\right) = 1$$

$$\log_3\Bigg(\underbrace{\sqrt{x-1}\ \frac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{x+3}}}_{=3}\Bigg) = 1 \qquad \sqrt{\frac{(x-1)(2x-7)}{x+3}} = 3$$

$$\boxed{\frac{2x^2 - 9x + 7}{x+3} = 9}$$

$$2x^2 - 9x + 7 = 9x + 27$$
$$2x^2 - 18x - 20 = 0 \longrightarrow x = 10,\ \cancel{x = -1}$$

$$\boxed{x = 10}$$

Seminario Universitario	Final	tema 3	HOJA N° 2 FECHA 22-3-24

③ El polinomio $p(x) = bx^5 + ax^4 + ax + 6$ con $b \neq 0$, tiene a $x=-1$ como una raíz múltiple

Determinar un polinomio mónico, $m(x)$, que no sea divisible por $x+1$ y que divida a p

$$p(x) = bx^5 + ax^4 + 0x^3 + 0x^2 + ax + 6$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
x^5 & b & a & 0 & 0 & a & 6 \\
-1 & & -b & b-a & a-b & b-a & -b \\
\hline
x^4 & b & a-b & b-a & a-b & b & \boxed{6-b} \\
-1 & & -b & 2b-a & 2a-3b & 4b-3a & \\
\hline
x^3 & b & a-2b & \underbrace{3b-2a}_{18-20} & 3a-4b & \underbrace{5b-3a}_{=0} &
\end{array}$$

$6-b=0$

$6-b=0 \to \boxed{b=6}$

y $b=6$

$5 \cdot 6 - 3a = 0$

$\boxed{a=10}$

$\boxed{p(x) = 6x^5 + 10x^4 + 10x + 6}$

$a - 2b = \overset{10-12}{-2}$

$\overset{30}{3a} - \overset{24}{4b} = 6$

$\boxed{t(x) = 6x^3 - 2x^2 - 2x + 6}$

↳ tiene una raíz real $x=-1$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 6 & -2 & -2 & 6 \\
-1 & & -6 & 8 & -6 \\
\hline
 & 6 & -8 & 6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$\boxed{s(x) = 6x^2 - 8x + 6}$

→ No tiene raíces reales

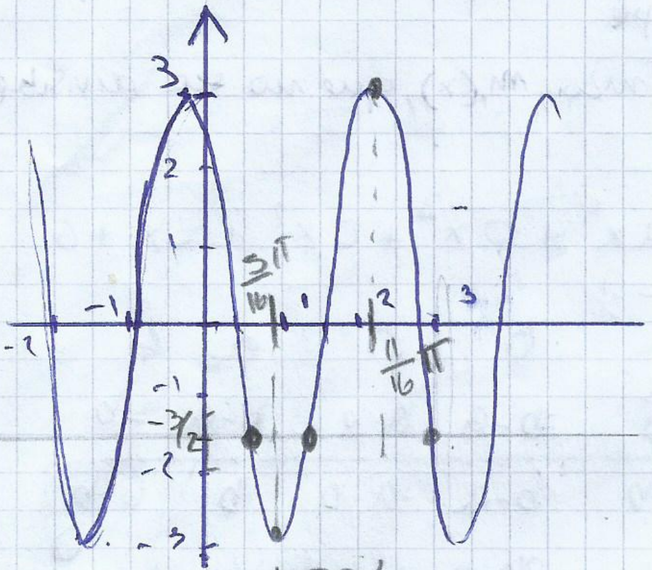
$$p(x) = (x+1)^3 (6x^2 - 8x + 6)$$
$$= 6(x+1)^3 \underbrace{\left(x^2 - \tfrac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{6}_{3}}x + 1\right)}_{m(x)}$$

$$\boxed{m(x) = x^2 - \tfrac{4}{3}x + 1}$$

NOTA

④ a) La función sinusoidal f alcanza su mínimo valor, -3, en $x = -\frac{5}{16}\pi$ y su máximo valor, 3, en $x = \frac{11}{16}\pi$

Resolver la ecuación $f(x) = -\frac{3}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$



$$f(x) = \overset{a}{3}\ \mathrm{sen}(bx + c)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{1}{2}T = \frac{11}{16}\pi - \frac{5}{16}\pi = \boxed{\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}T} \rightarrow \boxed{T = \frac{3}{4}\pi}$$

$$f(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(-\frac{8}{3}x + c\right) \qquad |b| = \frac{2\pi}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{8}{3}$$

probé cont y dió la curva al revés

$$f\left(\frac{11}{16}\pi\right) = 3 = 3\,\mathrm{sen}\left(-\frac{8}{3}\cdot\frac{11}{16}\pi + b\right)$$

$$1 = \mathrm{sen}\left(-\frac{11}{6}\pi + b\right) \rightarrow \mathrm{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{11}{6}\pi + b = \frac{\pi}{2} \rightarrow b = \frac{7}{3}\pi$$

$$\boxed{f(x) = 3\,\mathrm{sen}\left(-\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\pi\right)}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2} = 3\,\mathrm{sen}\left(-\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\pi\right)$$

$$-\frac{1}{2} = \mathrm{sen}\left(-\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\pi\right)$$

$$\mathrm{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\pi$$

$$\frac{8}{3}x = \frac{5}{2}\pi - 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{15}{16}\pi - \frac{3}{4}k\pi}$$

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\pi$$

$$\frac{8}{3}x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{7}{16}\pi + \frac{3}{4}k\pi}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{15}{16}\pi, \frac{7}{16}\pi, \frac{3}{16}\pi\right\}}$$

Gastón Alejandro Benítez ... lleno el DNI

4b) Sean los vectores $\vec{v}=(1,2)$ y $\vec{w}=(4,-3)$ y $\vec{x}=(2,1)$
Determine todos los vectores $\vec{z}=(a,b)$ tales que $\vec{v}+\vec{z}$ sea ortogonal a $\vec{x}$ y $\|\text{proy}_{\vec{w}}(\vec{v}+\vec{z})\|=2$

$$\vec{v}+\vec{z} = (1;2)+(a,b) = (1+a;\ 2+b)$$

$$(\vec{v}+\vec{z}) \perp \vec{x} \longrightarrow (\vec{v}+\vec{z})\cdot\vec{x} = 0$$

$$(1+a;2+b)(2,1) = 2(1+a)+1(2+b) =$$

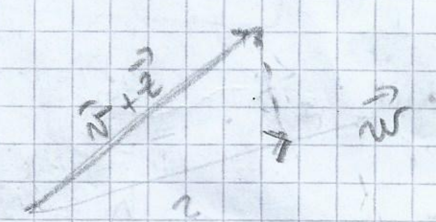
$$= 2+2a+2+b = 0$$

$$4+2a+b=0$$

$$\boxed{2a+b=-4}$$

$$(*)\ \boxed{b=-4-2a}$$

$$\text{proy}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|b\|^2}\cdot\vec{b}$$



$$\|\text{proy}_{\vec{w}}\ \vec{v}+\vec{z}\| = \left\| \frac{(\vec{v}+\vec{z})\cdot\vec{w}}{\|w\|^2}\cdot\vec{w} \right\| = \frac{(1+a;2+b)(4;-3)}{(1+a)^2+(2+b)^2}\cdot\sqrt{\underbrace{4^2+(-3)^2}_{25}} =$$

x enun

$$= \frac{4+4a-6-3b}{1+2a+a^2+4+4b+b^2}\cdot 5 = \frac{-2+4a-3b}{a^2+b^2+2a+4b+5}\cdot 5 = 2$$

$$-10+20a-15b = 2a^2+2b^2+4a+8b+10$$

$$2a^2+2b^2-16a+23b+20=0$$

$$(*)\quad 2a^2+2(-4-2a)-16a+23(-4-2a)+20=0$$

$$2a^2-8-4a-16a-92-46a+20=0$$

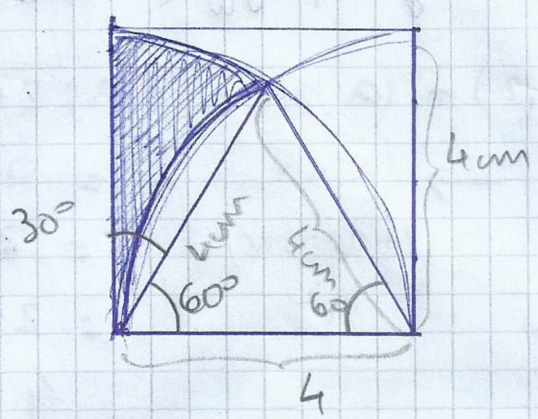
$$2a^2-66a-80=0 \longrightarrow a=$$

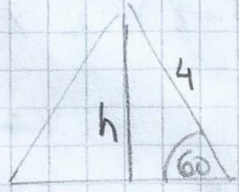
$$a=$$

NOTA

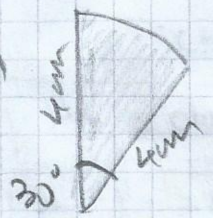
5) Con centro en dos de los vértices de un cuadrado se trazaron arcos de circunferencia tal como se muestra en el dibujo.

Sabiendo que el lado del cuadrado mide 4 cm, calcular el área de la región sombreada





A_1

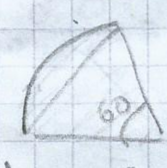


$$\to A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{30°}{360°} = \pi \cdot 16\,cm^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{4}{3}\pi\,cm^2$$

$$\boxed{A = \frac{4}{3}\pi\,cm^2}$$

A_2

$=$



$-$

equil. $=$

$$= \frac{\pi \cdot r^2}{6} - \frac{b \cdot h}{2} =$$

$$\frac{h}{4cm} = sen(60)$$

$$h = 2\sqrt{3}\,cm$$

$$= \frac{8}{3}\pi\,cm^2 - \frac{4cm \cdot 2\sqrt{3}\,cm}{\cancel{2}} =$$

$$= \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)cm^2 =$$

$$A_{sombr.} = A_1 - A_2 = \left[\frac{4}{3}\pi - \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)\right]cm^2 =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}\right)cm^2 =$$

$$= \left(4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)cm^2$$

$$\boxed{A_{sombr} = 2{,}74\,cm^2}$$

NOTA